

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

# **Colisões e Deformações**

**Leandro Bertoldo**

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

De: \_\_\_\_\_

Para: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

Dedico este livro a minha filha,  
**Beatriz Maciel Bertoldo**

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

**“Deus deseja que cada um de Seus filhos tenha inteligência e conhecimento, de maneira que com clareza e poder Sua glória seja revelada em nosso mundo”. (Review and Herald, 9 de junho de 1904)**

*Ellen Gould White*  
**Escritora, conferencista, conselheira,  
e educadora norte-americana.  
(1827-1915)**

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

# Sumário

## **Dados biográficos**

### **Prefácio**

1. Colisões Mecânicas
2. Coeficiente de Restituição
3. Coeficiente e Tempo
4. Coeficiente e Altura (I)
5. Coeficiente e Altura (II)
6. Coeficiente e Energia Potencial
7. Coeficiente e Energia Cinética
8. Coeficiente e Quantidade de Movimento
9. Dissipação e Restituição
10. Perda e Retorno de Altura
11. Energia Perdida e Recuperada
12. Relações
13. Energia Resultante
14. Velocidade Mínima de Salto
15. Frenagem
16. Durante o Impacto

## **SUCESSÃO**

17. Conceito de Altura Consumida
18. Equação da Altura Consumida
19. Energia Potencial Dissipada
20. Equação da Energia Potencial Dissipada
21. Energia Cinética Dissipada
22. Equação da Energia Cinética Dissipada
23. Quantidade de Movimento Dissipado
24. Equação da Quantidade de Movimento Dissipado
25. Equação Geral: Altura
26. Equação Geral: Energia Potencial

27. Equação Geral: Energia Cinética
28. Equação Geral: Quantidade de Movimento
29. Equação Geral: Velocidade
30. Equação Geral: Intervalo de Tempo
31. Equações Derivadas (I)
32. Equações Derivadas (II)
33. Equação Geral: Número de Diâmetros
34. Relações Matemáticas
35. Perda de Altura
36. Equação Geral: Perda de Altura
37. Altura Perdida em Função da Altura Inicial
38. Perda de Energia Potencial
39. Equação Geral: Energia Potencial Perdida
40. Energia Potencial Perdida em Função da Energia Inicial
41. Perda de Energia Cinética
42. Equação Geral: Energia Cinética Dissipada
43. Energia Cinética Dissipada em Função da Energia Inicial
44. Tempo Gasto
45. Equação Geral: Tempo Gasto
46. Tempo Gasto em Função do Tempo Inicial
47. Velocidade Perdida
48. Equação Geral: Velocidade Perdida
49. A Velocidade Perdida em Função da Velocidade Inicial
50. Movimento Dissipado
51. Equação Geral: Movimento Dissipado
52. Movimento Dissipado em Função do Movimento Inicial
53. Soma do Espaço Percorrido
54. Fórmula do Percurso
55. Espaço e Velocidade
56. Soma do Tempo Gasto
57. Fórmula do Tempo Decorrido
58. Tempo Gasto e Velocidade

## **OSCILAÇÃO**

59. Definição de Oscilação

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

- 60. Colisões Harmônicas
- 61. Período na Colisão I
- 62. Período na Colisão II
- 63. Amplitude na Colisão
- 64. Energia do MHS
- 65. Oscilações Amortecidas

## **DEFORMAÇÕES**

- 66. Deformações Elásticas
- 67. Coeficiente de Restauração
- 68. Coeficiente e Força Elástica
- 69. Coeficiente e Energia Potencial
- 70. Dissipação e Restituição
- 71. Perda e Retorno de Alongamento
- 72. Desvanecimento e Revigoramento
- 73. Relações
- 74. Conceito de Alongamento Perdido
- 75. Equação do Alongamento Perdido
- 76. Energia Potencial Dissipada
- 77. Equação da Energia Consumida
- 78. Força Elástica Perdida
- 79. Equação da Força Elástica Perdida
- 80. Equação Geral: Deformação por Alongamento
- 81. Equação Geral: Energia Potencial Elástica
- 82. Equação Geral: Força Elástica
- 83. Perda de Alongamento
- 84. Equação Geral: Perda de Alongamento
- 85. Alongamento Perdido em Função do Alongamento Inicial
- 86. Perda de Energia Potencial
- 87. Equação Geral: Energia Potencial Perdida
- 88. Energia Potencial Perdida em Função da Energia Inicial
- 89. Perda de Força Elástica
- 90. Equação Geral: Perda de Força Elástica
- 91. Alongamento Perdido em Função do Alongamento Inicial

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

**APÊNDICE:**

**VELOCIDADE DE DOBRA**

1. Encolhimento do Espaço
2. Contração do Comprimento
3. Dobra do Espaço
4. Velocidade de Dobra
5. Equação da Velocidade de Dobra
6. Dilatação do Tempo
7. Dobra Temporal
8. Expansão do Universo
9. Energia de Dobra
10. Equívocos de Einstein

## Dados biográficos

Meu nome é Leandro Bertoldo. Nasci no bairro do Belenzinho na cidade de São Paulo – SP. Sou o primeiro filho do casal José Bertoldo Sobrinho e Anita Leandro Bezerra. Meu irmão Francisco Leandro Bertoldo exerce a função de Oficial de Justiça.

Fiz as faculdades de Física (1980) e de Direito (2000) na Universidade de Mogi das Cruzes – UMC. Meu interesse sempre crescente pela área de exatas vem desde os meus 17 anos, quando comecei a escrever algumas teses originais sobre temas científicos, os quais dei a conhecer ao meu professor de Física “Benê”. Em 1995, publiquei o meu primeiro livro de Física, que foi um grande sucesso entre muitos professores universitários.

Sou casado com Daisy Menezes Bertoldo, funcionária do Tribunal de Justiça do Estado de São Paulo. Minha filha Beatriz Maciel Bertoldo, fruto do meu primeiro casamento com Francineide Maciel, é advogada na Comarca de Mogi das Cruzes. Muitas das minhas distrações e alegrias foram proporcionadas pelos meus maravilhosos cachorros: Fofa, Pitucha, Calma e Mimo.

Até o presente momento publiquei 63 livros, abrangendo pesquisas nas áreas da Física, Matemática, Química, Teologia e Poesia. Sendo 26 em Física; 3 em Matemática; 2 em Química; 6 em Literatura e 26 em Teologia.

Em todos os meus livros de ciências exatas defendo teses originais em Física, Matemática e Química, destacando-se: “Teoria Matemática e Mecânica do Dinamismo” (2002); “Teses da Física Clássica e Moderna” (2003); “Cálculo Seguimental” (2005); “Artigos Matemáticos” (2006) e “Geometria Leandroniana” (2007).

*Leandro Bertoldo*  
*Colisões e Deformações*

# Prefácio

Uma esfera em queda livre, partindo de uma altura ( $H$ ), colide contra um plano horizontal fixo e retorna para o alto numa altura ( $h_2$ ). Em seguida a esfera entra em queda livre a partir de sua altura ( $h_2$ ) e quicando contra o mesmo plano horizontal fixo retorna para o alto, alcançando uma nova altura ( $h_3$ ) e assim sucessivamente até entrar em repouso na sua posição de equilíbrio.

Caso a altura inicial ( $H$ ) de queda livre da esfera seja maior do que a altura ( $h_2$ ), e esta seja maior do que ( $h_3$ ), então estamos diante de uma colisão semielástica, a mais comum na natureza, a qual será o objeto principal de estudo nesta obra.

Esse simples fenômeno engloba o estudo das Colisões, o estudo das Sucessões de Colisões e o estudo do Movimento Harmônico Simples Colisivo. Todos os conceitos apresentados nesta obra são criações originais do autor.

Várias ideias inovadoras no estudo das colisões semielásticas foram desenvolvidas e apresentadas nesta obra pelo autor. Porém, o seu grande mérito consistiu no extraordinário lampejo que teve, ao perceber que todos os fenômenos colisivos sucessivos ficam perfeitamente determinados por uma “progressão geométrica”, cuja equação fundamental foi por ele aplicada às diversas grandezas relacionadas às colisões. Tal equação permitiu-lhe solucionar elegantemente ampla gama de problemas relacionados às colisões semielásticas, e foi extremamente útil no estudo de todos os Movimentos Harmônicos Amortecidos.

A produção deste livro com as suas descobertas inusitadas durou exatamente 47 dias. Começou a ser escrito a partir de 01 de dezembro de 2014 e foi concluído em 16 de janeiro de 2015. Ele é constituído por noventa e um temas que

tratam das “colisões simples”, das “sucessões de colisões” e das colisões no “Movimento Harmônico Amortecido”.

Para o autor duas são as principais equações desta obra. A primeira é aquela que indica a energia potencial em qualquer sucessão da oscilação, a saber:  $w_n = W \cdot e^{2(n-1)}$ . A segunda é a equação que reflete a energia potencial dissipada em qualquer sucessão da oscilação, a saber:  $r_n = W \cdot (1 - e^{2(n-1)})$ .

É digno de nota atentar para o fato de que o autor aplica as suas técnicas ao Movimento Harmônico Amortecido de uma mola oscilando em torno de sua posição de equilíbrio. Ele calcula as dissipações energéticas e as perdas dinâmicas em qualquer ponto da oscilação.

A obra termina com a apresentação de um apêndice, onde são desenvolvidos vários conceitos matemáticos relativísticos para explicar a “velocidade de dobra” de futuras naves espaciais. A equação que permite o cálculo da velocidade de dobra apresenta a seguinte forma:  $v^2 = c^2 [1 - (1/2^{2n})]$ .

O autor espera que esta inovadora obra possa realmente revolucionar todos os conceitos sobre Colisões Mecânicas e Movimentos Harmônicos Amortecidos, bem como o conceito de Velocidade de Dobra, tornando sua compreensão mais simples e clara.

**leandrobertoldo@ig.com.br**

# 1. Colisões Mecânicas

Considere uma esfera em queda livre partindo de uma determinada altura ( $H$ ). Também considere que essa esfera colide contra o piso em repouso. Dependendo da natureza da esfera e do piso podem ocorrer diversos fenômenos.

1°. A esfera quica contra o piso e retoma a sua altura inicial ( $H_1 = h_2$ ).

2°. A esfera quica contra o piso e retorna a uma altura inferior à altura inicial de queda ( $H_1 > h_2$ ).

3°. A esfera quica contra o piso e não retoma qualquer altura ( $h_2 = 0$ ).

Neste trabalho serão analisadas somente as colisões gravitacionais de uma esfera em queda livre, as quais ocorrem numa única direção. Elas são chamadas por unidirecionais frontais, porque considera a colisão central e frontal vertical da esfera contra uma superfície plana e horizontal.

Durante a colisão de uma esfera contra uma superfície, as forças externas podem ser desprezadas quando comparadas às internas. Portanto, o sistema pode ser considerado mecanicamente isolado.

Com vista à simplificação, no presente trabalho será desprezada a orientação da trajetória.

Antes da colisão a esfera se aproxima da superfície com uma “velocidade de queda livre” ( $V$ ). Após o impacto contra a referida superfície, a esfera é refletida e afasta-se com uma “velocidade de afastamento” ( $v$ ).

Na colisão de uma esfera contra uma superfície ocorrem perdas de energia em razão do aquecimento, da deformação e do som provocado pelo impacto. Nesse sistema isolado, jamais ocorrerá, de forma natural, um ganho de energia que possa elevar a esfera a uma altura superior à altura inicial de queda.

## 2. Coeficiente de Restituição

Isaac Newton (1642-1727) descobriu que o coeficiente de restituição ( $e$ ) de um impacto mecânico é determinado pela razão entre a velocidade de afastamento ( $v$ ) da esfera após o choque e a velocidade de queda livre ( $V$ ) antes do choque.

O referido enunciado é expresso do seguinte modo:

$$e = v/V$$

Como na colisão não existe ganho de energia, o módulo da velocidade de afastamento será sempre menor ou no máximo, igual ao módulo da velocidade de aproximação.

Portanto, considerando que a velocidade de afastamento apresenta módulo menor ou igual ao módulo da velocidade de queda livre, a razão matemática entre elas determina o coeficiente de restituição que está compreendido entre zero e um.

**Colisão elástica ( $e = 1$ ).** Ocorre quando, após a colisão contra a superfície, a esfera é restituída à sua altura que inicial de queda livre. O sistema não perde sua energia cinética. A velocidade depois do impacto é igual àquela antes do impacto, já que se trata de uma colisão perfeitamente elástica.

**Colisão semielástica ( $e > 0 < 1$ ).** Ocorre quando, após a colisão contra a superfície, a esfera é restituída a uma altura menor do que a altura inicial de queda livre. O sistema perde parte de sua energia cinética. A velocidade depois do impacto é menor do que aquela antes do impacto, já que se trata de uma colisão parcialmente elástica.

**Colisão inelástica ( $e = 0$ ).** Ocorre quando, após a colisão contra a superfície, a esfera não é restituída a nenhuma altura. O sistema perde totalmente sua energia cinética. A velocidade depois do impacto é nula, já que se trata de uma colisão inelástica.

### 3. Coeficiente e Tempo

Como foi dito, o coeficiente de restituição ( $e$ ) numa colisão é determinado pelo quociente da velocidade de afastamento ( $v$ ) da esfera após o choque, inversa pela velocidade da esfera em queda livre ( $V$ ) antes do choque.

O referido enunciado é expresso simbolicamente do seguinte modo:

$$e = v/V$$

Porém, sabe-se que a velocidade de queda livre é igual ao produto entre a aceleração gravitacional pelo tempo de queda livre.

Simbolicamente, o referido enunciado pode ser expresso pela seguinte equação:

$$v = g \cdot t$$

Substituindo convenientemente as duas últimas expressões resulta na seguinte demonstração:

$$e = g \cdot t'/g \cdot t$$

Eliminando os termos em evidência, resulta na seguinte realidade:

$$e = t'/t$$

Portanto, conclui-se que o coeficiente de restituição é igual à relação matemática entre o tempo de afastamento da esfera após o choque, pelo tempo decorrido em queda livre antes do choque.

## 4. Coeficiente e Altura (I)

Considere uma esfera em queda livre de uma altura (**H**). Ao colidir contra um plano horizontal fixo, retorna para o alto alcançando uma nova altura (**h**).

A altura de queda da esfera até chocar-se contra a superfície é expressa pela seguinte equação de Galileu Galilei:

$$\mathbf{H = g \cdot t^2/2}$$

Após a colisão a esfera retorna a uma nova altura, expressa pela seguinte equação:

$$\mathbf{h = g \cdot t'^2/2}$$

O coeficiente de restituição é definido pela seguinte expressão:

$$\mathbf{e = t'/t, \text{ ou seja: } e^2 = t'^2/t^2}$$

Substituindo convenientemente as três últimas expressões, vem que:

$$\mathbf{e^2 = 2h/g / 2H/g}$$

Eliminando os termos em evidência, resulta que:

$$\mathbf{e^2 = h/H}$$

Logo, conclui-se que o quadrado do coeficiente de restituição é igual ao quociente da altura alcançada pela esfera após o choque, inversa pela altura de queda livre antes do choque.