ARTIGOS MATEMÁTICOS

Leandro Bertoldo

Dedico esta obra à minha querida mãe
***Anita Leandro Bezerra**,*
que com grande esforço, sabedoria e esmerada dedicação
foi bem sucedida em educar-me nos caminhos
da honestidade, da responsabilidade e do conhecimento.

Nada é realmente grande,
senão o que é eterno em suas propensões.

Ellen Gould White
Escritora, conferencista, conselheira
e educadora norte-americana.
(1827-1915)

PREFÁCIO

Os artigos apresentados nesta obra é resultado da intensa atividade intelectual desenvolvida pelo autor como pesquisador nas áreas da Física e da Matemática. Neste livro encontram-se reunidos uma parcela dos artigos matemáticos produzidos pelo autor entre 1978 a 1984, quando ainda era estudante colegial e universitário.

Os artigos estão sendo publicados da forma como foram originalmente produzidos, sem qualquer alteração significativa. É claro que eles não pretendem ser um texto completo sobre o assunto que aborda, mas procura apenas apresentar a tese central defendida pelo autor.

Estes artigos abrangem diversos campos da Matemática. Todos representando idéias, soluções e reflexões originais cogitadas pelo autor, e possuem um certo grau de inovação no mundo da Matemática.

As teses aqui apresentadas foram escritas e demonstradas numa linguagem algébrica elementar. Sendo que em alguns poucos casos, onde eram indispensáveis, os artigos foram ilustrados com gráficos ou figuras geométricas, com o único propósito de facilitar a visualização da tese que o autor defende no artigo considerado. Destarte, o conhecimento de Matemática exigido, para a perfeita compreensão de cada uma das teses defendidas neste livro, corresponde ao programa do Ensino Médio.

A obra que o leitor possui em mãos é constituída por trinta e seis artigos matemáticos, cada qual totalmente independente dos demais. Portanto, os artigos podem ser individualizados e estudados isoladamente.

Aqui o leitor encontrará idéias como: Distribuição de Combinações; Progressão Fatorial Especial; Produtos Invariáveis; Cálculo Variável; Pacotes de Classes Numéricas; Números Virtuais; Propriedades dos Números Primos; Teoria dos Grupos; Legitimação; Cálculo Modular; Modulação; Cálculo Seguimental; Geometria Seguimental.

É esperança do autor que esta obra possa de alguma forma ser útil a todos aqueles que estudam e apreciam a Matemática como um amplo e inesgotável campo de pesquisas científicas.

Leandro Bertoldo
leandrobertoldo@ig.com.br

SUMÁRIO

ARTIGO I

CÁLCULO MODULAR

1. Introdução

O cálculo modular é uma tese altamente científica e poderosa para a solução de vários problemas de engenharia. Verdade é que a generalidade desse cálculo permite sua aplicação nos mais diversos ramos do conhecimento humano.

O cálculo modular que apresento, pode ser considerado como uma importante inovação da matemática, desde o método matemático das fluxões de Newton, que originaria o cálculo diferencial e integral. Essa inovação não é somente caracterizada pelo cálculo em si; mas, pelo método que foi composto.

2. Fi de uma grandeza

Uma definição matemática implica que o "**fi**" de uma grandeza é a razão entre um valor posterior pelo valor anterior da referida grandeza.

De uma maneira geral, representando a grandeza por **G** e o seu **fi** por ϕ**G**, onde ϕ (**fi**), corresponde à letra maiúscula do alfabeto grego; então, posso escrever que:

ϕG = valor posterior de G/valor anterior de G

Simbolicamente, posso escrever que:

$$\phi G = G_B/G_A$$

Deve-se observar que no presente artigo, a letra grega ϕ indica módulo ou **fi** de uma grandeza desconhecida.

3. Empregos do Cálculo Modular

O cálculo modular de Leandro é largamente empregado na física. Um dos exemplos mais simples é o seu emprego nas grandezas adimensionais, como o coeficiente de atrito; o coeficiente de restituição; certos coeficientes dinamoscópicos e tantos outros.

4. Funções

Quando dois **fis** estão relacionados de modo tal que o valor do primeiro é conhecido quando se expressa o valor da segunda, digo que o primeiro **fi** é uma função do segundo.

5. Grandezas fis e Constantes

Toda grandeza é **fi** quando apresenta um número ilimitado de valores. Já uma grandeza é uma constante, quando apresenta um valor fixo.

Os **fis** são indicados pelas últimas letras do alfabeto e as constantes pelas primeiras.

6. Fis Independentes e Dependentes

Um **fi**, à qual se podem atribuir valores arbitrariamente escolhidos, diz-se **fi** independente. O outro **fi**, cujo valor é determinado quando se dá o valor do **fi** independente, diz-se **fi** dependente ou função.

7. Notação das Funções

O símbolo **f(x)** é usado para indicar uma função de **x**. Para indicar distintas funções, basta simplesmente mudar a primeira letra como em **T(x)**, **d(x)** etc.

8. Intervalo de um Fi

Com uma certa freqüência, emprega-se o símbolo (**a**, **b**) sendo a menor do que **b**, para caracterizar todos os números compreendidos no intervalo **a** e **b**, eles inclusive, a menos que o contrário seja estabelecido.

9. Fi Contínuo

Um **fi x** fia continuamente em um intervalo (**a**, **b**) quando **x** cresce do valor **a**, para o valor **b**, de tal modo a tomar todos os valores compreendidos entre **a** e **b** na ordem de suas grandezas; ou quando **x** decresce de **x = b** para **x = a** tomando sucessivamente todos os valores intermediários.

10. Unitésimo

Um **fi v**, que tende a "**um**", digo "unitésimo". E escreve-se:

$$\lim v = 1 \text{ ou } v \to 1$$

Isto significa que os valores sucessivos de **v** se aproximam de **um**.

Se **lim v = l**, então **lim v/l = 1**, isto é, a razão entre o **fi** e o seu limite é um **unitésimo**.

ARTIGO II

MODULAÇÃO

1. Introdução

Vou investigar o modo pelo qual uma função muda de valor quando o fi independente sofre modulação.

2. Acréscimo Modular

O acréscimo modular de um fi que muda de um valor numérico para outro é a razão entre este segundo valor e o primeiro. Um acréscimo modular de **x** é indicado pelo símbolo **ϕx**, que se lê "**fi de x**".

Um acréscimo modular pode ser positivo se o **fi** cresce e negativo se decresce. Paralelamente, posso afirmar que:

a - **ϕx** indica um acréscimo modular de **x**;

b - **ϕy** indica um acréscimo modular de **y**,

c - **ϕf (x)** indica um acréscimo modular de **f(x)**;

d - etc.

Se em **y = f(x)** o **fi** independente **x** toma um acréscimo modular **ϕx**, então **ϕy** indicará o correspondente acréscimo modular do **fi** dependente **y**.

O acréscimo modular **ϕy** é, pois, a razão entre o valor que a função toma em **x . ϕx** e o valor da função em **x**.

3. Comparação de Acréscimo Modulares

Primeiramente considere a seguinte função:

$$\mathbf{y = x^2}$$

Tomarei um valor inicial para **x** e darei a este valor um acréscimo modular **ϕx**. Evidentemente **y** receberá um acréscimo modular correspondente **ϕy**, e tem-se:

$$\mathbf{y \,.\, \phi y = (x \,.\, \phi x)^2}$$

ou

$$\mathbf{y \,.\, \phi y = x^2 \,.\, \phi x^2}$$

Dividindo a referida igualdade por: $\mathbf{y = x^2}$, resulta que:

$$\mathbf{y \,.\, \phi y/y = x^2 \,.\, \phi x^2/x^2}$$

Eliminando os termos em evidência:

$$\phi y = \phi x^2$$

Dessa forma, obtém-se o acréscimo modular **ϕy** em termos de **ϕx**.

Para achar a diferença entre os acréscimos modulares, subtraem-se ambos os membros da última igualdade por **ϕx**; tem-se:

$$\phi y - \phi x = \phi x^2 - \phi x$$

4. Taxa de Acréscimos Modulares

Considere uma função contínua e os números reais $\mathbf{x_0}$ e **x**. A relação:

$$[f(x)/f(x_0)] – (x/x_0)$$

A referida diferença é chamada por "taxa de acréscimo modular" de **f** em $\mathbf{x_0}$ é, está bem definida para todo **x** pertencendo a o intervalo qualquer do corpo dos números reais, diferente de $\mathbf{x_0}$, porém não para $\mathbf{x = x_0}$.

5. Modulada de uma Função de um Fi

A definição de modulada, fundamental no cálculo modular é a seguinte: *Modulada de uma* *função é o limite da diferença do acréscimo modular da função para o acréscimo do fi independente, quando este último tende a um.*

Quando existe o limite mencionado, digo que a função é modulável.

Modulação de uma função:

$$\mathbf{y = f(x)}$$

é, pois, o seguinte:

Suponho que **x** tenha um valor fixo, dá-se a **x** um acréscimo modular **ϕx**; então a função **y** recebe um acréscimo modular **ϕy**, e se tem:

$$\mathbf{y \cdot \phi y = f(x \cdot \phi x)}$$

Ou seja, tendo **y = f(x)** presente, vem que:

$$\mathbf{\phi y \cdot f(x) = f(x \cdot \phi x)}$$

$$\mathbf{\phi y = f(x \cdot \phi x)/f(x)}$$

Subtraindo ambos os membros pelo acréscimo modular do **fi**, **ϕx**, tem-se que:

$$\mathbf{\phi y - \phi x = [f(x \cdot \phi x) - \phi x]/f(x)}$$

Que é a diferença entre os acréscimos modulares **ϕy** e **ϕx**. O limite desta diferença quando **$\phi x \rightarrow 1$**, é, por definição, a modulação de **f(x)**, que indico pelo símbolo **$m_y - m_x$**. Portanto, pode-se escrever que:

$$m_y - m_x = \lim_{(\phi x \rightarrow 1)} [f(x \cdot \phi x) - \phi x]/f(x)$$

Vem a definir a modulação de **f(x)** em diferenciação a **x**.

Da penúltima relação, obtém-se que:

$$m_y - m_x = \lim_{(\phi x \rightarrow 1)} \phi y - \phi x$$

Semelhantemente, se **u** é uma função de **t**, então:

$$m_u - m_t = \lim_{(\phi x \rightarrow 1)} \phi u - \phi t = \text{modulada de u em relação a t}$$

O processo para se achar a modulação de uma função é denominado por modulação.

6. Símbolos para as Moduladas

Como **ϕy** e **ϕx** são números, a diferença é caracterizada por:

$$\phi y - \phi x$$

O símbolo:

$$\mathbf{m_y - m_x}$$

Contudo, não representa uma diferença; ela é o valor do limite de **ϕy - ϕx**, quando **ϕx tende a um**. Em uma série de casos o símbolo se comporta como se fosse uma diferença.

Como a modulação de uma função de **x** é também uma função de **x**, o símbolo **f'(x)** é também usado para indiciar a modulação de **f(x)**. Logo, se:

$$\mathbf{y = f(x)}$$

Posso escrever que:

$$\mathbf{m_y - m_x = f'(x)}$$

Que se diz: *modulação de y em diferença a x igual a f apóstrofo de x*. O símbolo:

$$\mathbf{m - mx\rightarrow}$$

É considerado como um todo, chama-se operador de Leandro e indica que uma função escrita à sua direita deve ser modulada em diferença a **x**. Assim,

a) $\mathbf{m_y - m_x}$ ou $\mathbf{m - mx \rightarrow y}$, indica a modulação de **y** em diferença a **x**;